On Equivariant Desuspension (多様体上の群作用と同変ホモトピー論)

森本, 雅治

森本, 雅治. On Equivariant Desuspension (多様体上の群作用と同変ホモトピー論). 数理解析研究所講究録 1979, 365: 89-94

1979-10

数理解析研究所講究録
365巻 1979年 89-94

On Equivariant Desuspension

阪大 理学部 森本 雅治

コンパクト・リー群Gが与えられた時(有限次元)実G－ベクトル空間を,その単位球面のG－ホモトピー同値あるいは安定G－ホモトピー同値によって分類する問題がある。この問題はGが有限群の場合に帰着されるということが知られている。そこで以下Gは有限群とする。上の問題に関連して,G－ホモトピー同値と安定G－ホモトピー同値の差が我々の関心を引く。

V, Wを実G－ベクトル空間, $\mathbb{R}$を自明なG－作用を持つ1次元実G－ベクトル空間とする。V, Wおよび$\mathbb{R}$にG－不変な内積を入れ,さらに$V\oplus\mathbb{R}$, $W\oplus\mathbb{R}$に自然にG－不変な内積を導入しておく。Vの単位球面を$S(V)$とする。即ち

$$S(V)=\{x\in V : \|x\|=1\}$$

である。W等に対しても同様である。自然数nに対して$n\mathbb{R}$でn個の$\mathbb{R}$の直和を表す。

<u>問題A</u>　$S(V\oplus n\mathbb{R})$ から $S(W\oplus n\mathbb{R})$ への G－ホモトピー同値があるとき $S(V)$ から $S(W)$ への G－ホモトピー同値があるか。

この問題に密接に関連するのが次の問題である。

$S(V)$ から $S(W)$ へ G－写像 f があるとき、そのサスペンジョンと呼ばれるべき G－写像 $\Sigma f : S(V\oplus\mathbb{R}) \longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$ が定義される。$S(V)$ から $S(W)$ への G 写像の全体を G－ホモトピー同値で割ったものを $[S(V), S(W)]_G$ で表す。このとき自然に $\Sigma : [S(V), S(W)]_G \longrightarrow [S(V\oplus\mathbb{R}), S(W\oplus\mathbb{R})]_G$ が誘導される。

<u>問題B</u>　$\Sigma([S(V), S(W)]_G) \subset [S(V\oplus\mathbb{R}), S(W\oplus\mathbb{R})]_G$ の決定。

また一般に $[S(V), S(W)]_G$ は加群とは限らない。しかし，$[S(V\oplus 2\mathbb{R}), S(W\oplus 2\mathbb{R})]_G$ には自然に加群構造がはいる。この事実は（G－ホモトピーに関するある条件をみたす）$S(V)$ から $S(W)$ への G－写像を作ろうとする時、まず $S(V\oplus n\mathbb{R})$ から $S(W\oplus n\mathbb{R})$ への G－写像を作り、サスペンジョンの逆にあたる操作によって $S(V)$ から $S(W)$ への G－写像を手に入れろ

ことはできないものかという疑問を投げかける。

問題A，Bおよび上の理由によってサスペンジョンの逆操作を考えてみた。

HがGの部分群であるとき$H<G$によって表す。Hの共役類を(H)で書く。G－空間Xがあるとき

$$\mathrm{Iso}(X)=\{(H):H=G_x \text{ for some } x\in X\},$$

$H<G$に対して

$$X^H=\{x\in X: \forall g\in H, gx=x\}$$

とする。G－写像$f:S(V)\longrightarrow S(W)$に対して$f^H$を

$$f^H=f|S(V)^H : S(V)^H\longrightarrow S(W)^H$$

で定める。fを動径方向に自然に拡張してVからWへのG－写像としておく。$(a,b)\in S(V\oplus\mathbb{R})$，$a\in V$，$b\in\mathbb{R}$に対して，

$$\Sigma f(a,b)=(f(a),b)$$

により$\Sigma f: S(V\oplus\mathbb{R})\longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$を定める。

問題A，Bに対する解答が定理A，Bである。

定理A　$(H)\in\mathrm{Iso}(S(V))$で$H\neq G$に対して$\dim V^H\geq 2$が成り立てば，$S(V\oplus n\mathbb{R})$と$S(W\oplus n\mathbb{R})$がG－ホ

モトピー同値の時$S(V)$と$S(W)$はG−ホモトピー同値である。

定理B　VおよびWが次の(i)および(ii)をみたすとき

$$\Sigma : [S(V), S(W)]_G \longrightarrow [S(V\oplus\mathbb{R}), S(W\oplus\mathbb{R})]_G$$

は（加群の）全型である。

(i)　$\dim V = \dim W$。

(ii)　$(H) \in \mathrm{Iso}(S(V))$に対して$\dim V^H = \dim W^H$で、$\dim V^G \geqq 2$。

これらの定理は次の補題から得られる。

補題1　G−写像$f : S(V\oplus\mathbb{R}) \longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$，$V$および$W$が次の条件(i)〜(iv)をみたしているとする。

(i)　$\dim V = \dim W$。

(ii)　$(H) \in \mathrm{Iso}(S(V))$に対して$\dim V^H = \dim W^H$で、$H \neq G$のとき$\dim V^H \geqq 2$。

(iii)　$f(0,1) = (0,1)$かつ$f(0,-1) = (0,-1)$，ここで$0 \in V$ or W，$\pm 1 \in \mathbb{R}$。

(iv)　$\dim V^G = 1$ならば$\deg f^G = 0$ or ± 1。

このとき$S(V)$から$S(W)$へのG−写像gで、ΣgがfとG−ホモトピックになるものが存在する。

補題1は以下の命題，補題により証明される。

<u>命題2</u>　各$(H)\in Iso(S(V))$に対して$\dim S(V)^H \leqq \dim S(W)^H$であればS(V)からS(W)へのG－写像が存在する。

XをコンパクトG－多様体，$Y=S(W\oplus\mathbb{R})$としよう。$i=1, 2$に対してf_iがXからYへのG－写像であるとき，$d(f_1, f_2)$を

$$d(f_1, f_2)=\sup\{\|f_1(x)-f_2(x)\| : x\in X\}$$

で定める。

<u>命題3</u>　$d(f_1, f_2)<2$ならばf_1とf_2はG－ホモトピックである。

さてXの各連結成分の次元は相等しく，X^Hの各連結成分の次元も相等しいものとしよう。それによって$\dim X$および$\dim X^H$がおのおの定められているとする。

<u>補題4</u>　XおよびYが条件(a)，(b)をみたすとする。

(a)　$\dim X=\dim Y$。

(b)　$(H)\in Iso(X)$について$\dim X^H=\dim Y^H$。

XからYへのG－写像fが$f(\partial X)\not\ni(0,\pm1)$をみたすとき，任意の$\delta>0$に対して次の(i)，(ii)および(iii)をみたすG－写像$f_\delta: X\longrightarrow Y$が存在する。

(i) $f_\delta^{-1}((0,\pm1))$は有限集合。

(ii) $d(f_\delta, f)<\delta$かつf_δはfにG－ホモトピック。

(iii) $f_\delta|\partial X = f|\partial X$。

系5 補題1のfは$\tilde{f}^{-1}((0,\pm1))$が有限集合であるG－写像$\tilde{f}: S(V\oplus\mathbb{R})\longrightarrow S(W\oplus\mathbb{R})$に$G$－ホモトピックである。

参考文献

[1] C.N.Lee and A.G.Wasserman, *On the groups JO(G)*, Memorirs of the American Mathematical society 159 (1975).

[2] A. Meyerhoff and T. Petrie, *Quasi equivalence of G-modules*, Topology 15 (1976).

[3] R.L. Rubinsztein, *On the equivariant homotopy of spheres*, Dissertations Math. (Rozprawy Mat.) 134 (1976).